

## MAI 1 - 5. cvičení

### I. Opakování vlastností elementárních funkcí:

(příklady k opakování - z 1. cvičení)

1. Načrtněte grafy funkcí (bez užití diferenciálního počtu):

- a)  $f(x) = |x|$  a pak zkuste také grafy funkcí  $|x-1|$ ;  $|x-1| - |5-x|$ ;  $||x-1|-1|$ ;  $||x-1|-1|^2$ ;  $||x-1|^2 - 1|$ ;
- b)  $f(x) = \sqrt{x}$  a pak zkuste také grafy funkcí  $\sqrt{-x}$ ;  $\sqrt{|x|}$ ;  $\sqrt{x^2}$ ;  $\sqrt{x-1}$ ;  $\sqrt{x}-1$ ;
- c)  $f(x) = \frac{1}{x}$  a pak zkuste také grafy funkcí  $\frac{1}{|x|} + 1$ ;  $\frac{1}{|x+1|}$ ;  $\frac{x+1}{x-2}$ ;  $\left| \frac{x+1}{x-2} \right|$ ;
- d)  $f(x) = \frac{1}{x^2}$  a pak zkuste také grafy funkcí  $\frac{1}{(x+1)^2}$ ;  $\frac{1}{x^2} + 1$ ;  $\frac{1}{x^2+1}$ ;  $\frac{1}{x^2-1}$ ;
- e)  $f(x) = e^x$  ( $= \exp x$ ) a pak zkuste také grafy funkcí  $\exp(-x)$ ;  $\exp(x-2)$ ;  $\exp|x|$ ;  $\exp(-|x|)$ ;  $\exp(x^2)$ ;  $\exp(-x^2)$ ;  $\exp\left(\frac{1}{x}\right)$ ;
- g)  $f(x) = \ln x$  a pak zkuste také grafy funkcí  $\ln(-x)$ ;  $\ln|x|$ ;  $|\ln x|$ ;  $|\ln|x||$ ;  $\ln(x+1)$ ;  $\ln \frac{1}{x}$ ;  $\ln \frac{1}{|x|}$ ;  $\ln(x^2)$ ;  $\ln \frac{x+1}{x-2}$ ;
- h)  $f(x) = \sin x$  a  $f(x) = \cos x$  a zkuste také grafy funkcí  $\sin\left(\frac{x}{2}\right)$ ;  $\cos(2x)$ ;  $\cos(x+\pi)$ ;  $|\sin x|$ ;  $\sin|x|$ ;  $\cos|x|$ ;  $\sqrt{1-(\sin x)^2}$ .

2. Najděte definiční obory funkcí:

- a)  $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-2}}$ ;  $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x^2-9}}$
- b)  $f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{3-x}\right)$ ;  $f(x) = \ln(x^2-1)$ ;  $f(x) = \ln(\ln x)$ ;  $f(x) = \ln(\ln x - 1)$ ;  $f(x) = \ln(\ln(x-1))$ ;
- c)  $f(x) = \sqrt{\cos x}$ ;  $f(x) = \sqrt{1-(\sin x)^2}$ ;  $f(x) = \sqrt{(\sin x)^2 - 1}$ ;  $f(x) = \ln(\sin x)$ ;  $f(x) = \ln\left(\sin x - \frac{1}{2}\right)$ ;

3. Vlastnosti funkce:

- a) Zopakujte si definice pojmů: (i) funkce lichá, sudá, periodická;  
(ii) funkce rostoucí, klesající, neklesající, nerostoucí na množině  $M \subseteq \mathbb{R}$ ;  
(iii) funkce prostá na  $M \subseteq \mathbb{R}$ ;  
(iv) funkce inverzní k funkci  $f$  na  $M \subseteq \mathbb{R}$ .
- b) Dokažte (bez užití derivace), že funkce  $f(x) = x^2$  je rostoucí na intervalu  $[0, +\infty)$  a klesající na intervalu  $(-\infty, 0]$ .

c) Najděte maximální intervaly, na kterých jsou ryze monotónní funkce:

$$f(x) = x^2 + 2x + 2; \quad g(x) = \frac{1}{x^2 + 1}; \quad h(x) = \exp(-x^2); \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}; \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

A pokuste se to dokázat za předpokladu, že „víme“, že funkce  $e^x$  je rostoucí funkce v  $\mathbb{R}$ .

A dva „problémky“ pro zájemce:

d) Ukažte, že je-li funkce  $f$  lichá a  $0 \in Df$ , pak je  $f(0) = 0$ .

e) Promyslete, zda lze z monotonie dvou (i více) funkcí odvodit monotonii funkce z nich složené (pokud je složená funkce definována). Pokuste se výsledek co nejpřesněji formulovat a třeba i dokázat.

#### 4. Inverzní funkce:

a) Promyslete (a třeba se pokuste i dokázat):

Je-li funkce  $f$  rostoucí (resp. klesající) na intervalu  $(a, b)$ , pak je funkce  $f$  na intervalu  $(a, b)$  prostá, a tedy existuje k funkci  $f$  na intervalu  $(a, b)$  funkce inverzní.

b) Najděte inverzní funkci k funkci

i)  $f(x) = x^2$  na intervalu  $(-\infty, 0]$ ;

ii)  $f(x) = x^2 + 2x + 2$  na maximálních možných intervalech;

iii)  $f(x) = \frac{x-2}{x+1}$  na maximálních možných intervalech;

iv)  $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$  a  $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$  na maximálních možných intervalech.

c) Definujte a vyšetřete vlastnosti funkce inverzní k funkci

i)  $f(x) = \sin x$  na intervalu  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  (fce  $\arcsin x$ );

ii)  $f(x) = \operatorname{tg} x$  na intervalu  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  (fce  $\operatorname{arctg} x$ ).

## II. Limita funkce – úvod.

1. Z definice limity ukažte:

a)  $\lim_{x \rightarrow 2} (3x - 2) = 4$ ; b)  $\lim_{x \rightarrow 0+} \sqrt{x} = 0$ ; c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ ; d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ .

2. Ukažte, že platí:

(i)  $\lim_{x \rightarrow c} |f(x)| = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0$

(ii) Je-li  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0$  a funkce  $g(x)$  je omezená v nějakém prstencovém okolí bodu  $c$ , pak i  $\lim_{x \rightarrow c} f(x)g(x) = 0$ .

3\*. Nechť funkce  $f$  je neklesající a omezená v intervalu  $(a, b)$ . Dokažte, že pak pro libovolné  $c \in (a, b)$

existují vlastní limity  $\lim_{x \rightarrow c+} f(x)$  a  $\lim_{x \rightarrow c-} f(x)$ ; co lze říci o oboustranné limitě  $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ ?